RACCOLTA DI ESERCIZI DI SENSORI

1

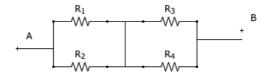
Si consideri un Ponte di Wheatstone formato da un sensore resistivo ($R=R_o*(1+\delta)$ e tre resistenze di valore R_o con $R_o=500$ K Ω . Il ponte è alimentato con una tensione $V_i=10$ V. Calcolare il limite di rivelazione (LOD) teorico della grandezza δ a T=300K.

La sensibilità del ponte nell'intorno di δ =0 è:

$$S = \frac{V_i}{4} = \frac{10}{4} = 2.5V$$

Il valore teorico del LOD corrisponde ad un errore nella lettura della tensione d'uscita pari al rumore elettronico. Nel caso in esame si considera come sorgente di rumore elettronico solo il rumore termico. Il rumore termico totale è uguale al rumore della resistenza equivalente del ponte calcolata ai capi dei terminali d'uscita. Nell'intorno di δ =0 (condizione per il calcolo del LOD) le quattro resistenze del ponte

Nell'intorno di δ =0 (condizione per il calcolo del LOD) le quattro resistenze del ponte sono uguali e pari ad R_0 . Per calcolare la resistenza equivalente è conveniente disegnare il ponte nel modo seguente:



quindi:

$$R_{eq} = R_1 / R_2 + R_3 / R_4 = 250 + 250 = 500 \,\mathrm{K}\Omega$$

la resistenza equivalente ha lo stesso valore di una resistenza singola. Per calcolare la tensione di rumore si applica la formula del rumore termico:

$$V_n = \sqrt{4 \cdot k \cdot T \cdot R} = \sqrt{4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 500 \cdot 10^3} = 9 \cdot 10^{-8} \frac{V}{\sqrt{Hz}} = 90 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

La risoluzione è quindi pari a:

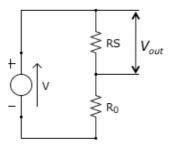
$$\delta_{LOD} = \frac{V_n}{S} = \frac{90 \cdot 10^{-9}}{2.5} = 36 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\sqrt{Hz}}$$

Supponendo di misurare il segnale con una banda di frequenza pari a 1KHz il limite di rivelazione della variazione di resistenza è pari a:

$$\Delta R_{LOD} = R_0 \cdot \delta_{LOD} \cdot \sqrt{B} = 500 \cdot 10^3 \cdot 36 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{10^3} = 0.5 \ \Omega$$

2

Si consideri un partitore di tensione formato da un sensore resistivo ($R_S=R_o*(1+\delta)$ e da una resistenza R_o . Nel caso in cui $R_o=100~\text{K}\Omega$ e V=5V calcolare il limite teorico del LOD a T=300K della quantità δ per una banda di frequenza pari a 1KHz.



Per la soluzione è necessario calcolare la sensibilità nell'intorno di δ =0.

$$\begin{split} V_{out} &= V \cdot \frac{R_0 \cdot (1+\delta)}{R_0 + R_0 \cdot (1+\delta)} = V \cdot \frac{1+\delta}{2+\delta} \\ S &= \frac{V_{out}}{d\delta} = \frac{V}{(2+\delta)^2} \to S_{\delta=0} = \frac{V}{4} = \frac{5}{4} = 1.25 \ V \end{split}$$

La tensione di rumore ai capi dei terminali d'uscita è pari al rumore termico della resistenza equivalente; inoltre, per valutare il LOD si deve porre δ =0. La resistenza equivalente è pari al parallelo delle due: R_{eq} = R_0 /2 =50K Ω .

Per il calcolo del rumore si può applicare la formula semplificata valida per T=300K.

$$V_n = 0.129 \cdot \sqrt{R[M\Omega] \cdot B[Hz]} \ \mu V$$

$$V_n = 0.129 \cdot \sqrt{0.05 \cdot 10^3} = 0.91 \ \mu V$$

$$\delta_{LOD} = \frac{0.91 \cdot 10^{-6}}{1.25} = 0.7 \cdot 10^{-6}$$

Il valore minimo apprezzabile di variazione di resistenza è quindi pari a:

$$\delta_{LOD} = \frac{\Delta R_{LOD}}{R_0} \to \Delta R_{LOD} = \delta_{LOD} \cdot R_0 = 0.7 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^3 = 0.07 \ \Omega$$

Ovviamente per poter apprezzare una risoluzione così piccola è necessario che il sistema di misura della tensione V_0 abbia un errore di lettura inferiore a 0.91 μV .

Si osservi che sia la sensibilità sia la tensione di rumore dipendono dal valore di δ . Nell'intorno di un valore di δ qualsiasi la resistenza equivalente è pari a:

$$R_{eq} = \frac{R_o \cdot R_o \cdot (1+\delta)}{R_o + R_o \cdot (1+\delta)} = R_o \cdot \frac{1+\delta}{2+\delta}$$

La tensione di rumore corrispondente (sempre a T=300K) diventa:

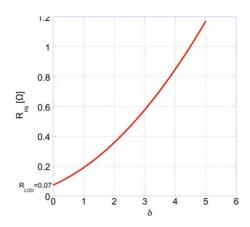
$$V_n = 0.129 \cdot \sqrt{R[M\Omega] \cdot \frac{1+\delta}{2+\delta} \cdot B[Hz]} \ \mu V$$

considerando quindi l'espressione della sensibilità si ha la seguente risoluzione:

$$\begin{split} \delta_{ris} &= \frac{0.129 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{R_0[M\Omega] \cdot \frac{1+\delta}{2+\delta} \cdot B[Hz]}}{\frac{V}{(2+\delta)^2}} \\ \delta_{ris} &= \frac{0.129 \cdot 10^{-6}}{V} \cdot \sqrt{R_0[M\Omega] \cdot B[Hz] \cdot (1+\delta)(2+\delta)^3} \end{split}$$

L'andamento della risoluzione della resistenza, con i dati del problema, in funzione di δ \acute{e} :

$$\Delta R_0 = \frac{0.129 \cdot 10^{-6}}{V} \cdot \sqrt{R_0[M\Omega] \cdot B[Hz] \cdot (1+\delta)(2+\delta)^3} \cdot R_0$$



3

Un termistore a semiconduttore presenta un valore di resistenza pari a 1 K Ω alla temperatura T=100°C e un valore di resistenza pari a 100 K Ω a T=0°C. Calcolare la resistenza a T=40°C.

Il termistore a semiconduttore è caratterizzato dalla seguente relazione:

$$R(T) = R_{T_0} \cdot exp\left[B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

Dai dati del problema si possono ricavare i parametri della relazione precedente. Per ricavare B si sostituiscono nella relazione precedente $T=100^{\circ}C=373$ K e $T_0=0^{\circ}C=273$ K e i valori corrispondenti di resistenza. Risolvendo per B si ottiene:

$$B = \frac{\ln \frac{R(T)}{R_{T_o}}}{\frac{1}{T} - \frac{1}{T_o}} = \frac{\ln \frac{1}{100}}{\frac{1}{373} - \frac{1}{273}} = 4689K$$

Noto il valore di B e prendendo come temperatura di riferimento T_0 =0°C, è possibile calcolare la resistenza del sensore per qualunque temperatura. In particolare, per T=40°C=313K si ottiene:

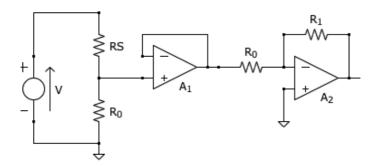
$$R = R_{T_0} \cdot exp \left[\beta \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] = 100 \cdot exp \left[4689 \cdot \left(\frac{1}{313} - \frac{1}{273} \right) \right] = 11K\Omega$$

Esercizi di Sensori

C. Di Natale

4

Si consideri il seguente circuito comprendente un sensore di temperatura con caratteristica $R_s(T)=R(T_0)^*[1+k^*(T-T_0)]$ con $k=0.01\ ^{\circ}C^{-1}$, $T_0=0\ ^{\circ}C$, $R(T_0)=R_0=100\ k\Omega$, $V_0=5V$, ed $R_1=3R_0$. Se l'escursione di V_{out} è $\pm 10V$ calcolare l'intervallo misurabile di temperatura.

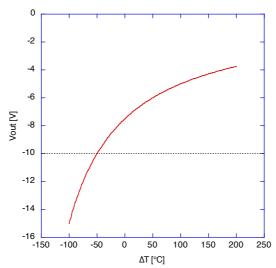


All'interno dell'intervallo di uscita ±10V gli op-amp sono ideali. La relazione tra segnale d'uscita e temperatura del sensore è quindi la seguente:

$$V_{out} = -\frac{R_I}{R_0} \cdot V_0 \cdot \frac{R_0}{R_0 + R_S} = -3 \cdot V_0 \cdot \frac{R_0}{R_0 + R_0 \cdot (I + k \cdot \Delta T)} = -\frac{3 \cdot V_0}{2 + k \cdot \Delta T}$$

Dove $\Delta T = T - T_0 \text{ con } T_0 = 0^{\circ}C$.

Graficando V_{out} in funzione di ΔT si osserva che v_{out} assume valori negativi compresi tra - 10 e 0 V



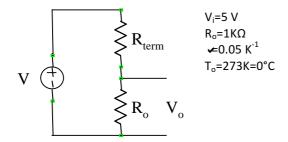
 V_{out} =-10 V viene raggiunta per un valore di ΔT pari a:

$$V_{out} = -\frac{3 \cdot V_0}{2 + k \cdot \Delta T} \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{k} \cdot \left(-3 \frac{V_0}{V_{out}} - 2\right) = \frac{1}{0.01} \cdot \left(-3 \frac{5}{-10} - 2\right) = -50^{\circ} C$$

Si possono quindi misurare, nel limite di validità della caratteristica del sensore, le variazioni di ΔT comprese nell'intervallo -50°C e + ∞ .

5

Si consideri un sensore RTD, con caratteristica $R=R_o\cdot \left(I+\alpha \left(T-T_o\right)\right)$, connesso nel circuito in figura



Calcolare l'errore massimo di misura di V_0 per il quale si ottiene una risoluzione massima di 0.1K nell'intervallo $\Delta T=0 \div 100$ °C.

La tensione d'uscita rispetto alla temperatura è:

$$V_0 = V_i \cdot \frac{1}{2 + \alpha \cdot T}$$

considerando T₀=0°C. La sensibilità è pari a:

$$S = \frac{dV_0}{dT} = \frac{-V_i \cdot \alpha}{\left(2 + \alpha \cdot T\right)^2}$$

Viene richiesto di calcolare l'errore massimo di V_0 quindi il calcolo deve essere effettuato nella condizione peggiore, cioè per $T=100^{\circ}C$. in corrispondenza della quale la sensibilità è:

$$S = \frac{-5 \cdot 0.05}{\left(2 + 0.05 \cdot 100\right)^2} = -0.005 \frac{V}{K}$$

Applicando la definizione di risoluzione e risolvendo per l'errore sul segnale d'uscita si ottiene:

$$\Delta V_{err} = T_{ris} \cdot |S| = 0.1 * 0.005 = 0.5 \,\text{mV}$$

6

Si supponga di alimentare un sensore RTD di platino (α =4*10⁻³ K⁻¹ e R₀=100 Ω a T=0°C) con un generatore di corrente di valore nominale di 1 mA, caratterizzato da una fluttuazione massima attorno al valore nominale di 1000 ppm. Supponendo di misurare in uscita la tensione ai capi del sensore e trascurando ogni altra sorgente di errore si determini la risoluzione della misura di temperatura.

La tensione ai capi del sensore è pari a:

$$v_0 = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \cdot I$$

La sensibilità quindi vale:

$$S = \frac{dv_0}{d\Delta T} = R_0 \cdot \alpha \cdot I$$

Per il calcolo della risoluzione bisogna valutare l'errore nella misura di I dovuto alla fluttuazione di I:

$$v_0 = R_0 \cdot I \Longrightarrow v_{0.err} = R_0 \cdot I_{err}$$

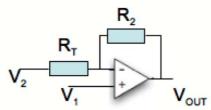
Si consideri che 1000 ppm di 1 mA corrispondono a 1000 milionesimi di 1 mA pari a 1 μ A. Quindi la risoluzione vale:

$$\Delta T_{ris} = \frac{v_{0,err}}{S} = \frac{R_0 \cdot I_{err}}{R_0 \cdot \alpha \cdot I} = \frac{I_{err}}{\alpha \cdot I} = \frac{10^{-6}}{4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}} = 0.25 K$$

7

Con riferimento al circuito seguente si consideri l'op-amp ideale ed R_2 =10 K Ω . R_T è un termistore caratterizzato da $R_{T=20^{\circ}C}$ =1 K Ω e B=4500 K.

Calcolare il valore delle tensioni V_1 e V_2 affinchè si abbiano le seguenti condizioni: V_{out} =0 V per T=20°C e la sensibilità nell'intorno di T=20°C pari a 0.5 V/K.



Per risolvere il problema è opportuno linearizzare la caratteristica del termistore nell'intorno di T=20°C:

$$R_{T_0} = 1K\Omega; \quad \alpha = -\frac{B}{T^2} = -\frac{4500}{293^2} = 0.05K^{-1}$$

Nell'ipotesi di op-amp ideale sono verificate le proprietà di massa virtuale e corrente di ingresso nulla. Con queste condizioni vale la seguente espressione:

$$\frac{V_2 - V_I}{R_T} = \frac{V_I - V_{out}}{R_2} \implies V_{out} = V_I \cdot \frac{R_T + R_2}{R_T} - V_2 \cdot \frac{R_2}{R_T}$$

Per ΔT =0 la resistenza del termistore vale R_{TO} , da cui si ottiene la prima condizione per la soluzione dell'esercizio: $V_2 = V_I \cdot \frac{R_T + R_2}{R_2}$.

Per esprimere la seconda condizione si deve valutare la sensibilità del segnale d'uscita rispetto a ΔT calcolata in corrispondenza di ΔT =0.

$$\begin{split} V_{out} &= V_{I} \cdot \frac{R_{T0} \cdot \left(I + \alpha \cdot \Delta T\right) + R_{2}}{R_{T0} \cdot \left(I + \alpha \cdot \Delta T\right)} - V_{2} \cdot \frac{R_{2}}{R_{T0} \cdot \left(I + \alpha \cdot \Delta T\right)} \\ S &= \frac{dV_{out}}{d\Delta T} = -V_{I} \cdot \frac{\alpha \cdot R_{2}}{R_{T0} \cdot \left(I + \alpha \cdot \Delta T\right)^{2}} + V_{2} \cdot \frac{\alpha \cdot R_{2}}{R_{T0} \cdot \left(I + \alpha \cdot \Delta T\right)^{2}} \\ S_{\Delta T = 0} &= -V_{I} \cdot \frac{\alpha \cdot R_{2}}{R_{T0}} + V_{2} \cdot \frac{\alpha \cdot R_{2}}{R_{T0}} \end{split}$$

Sostituendo a V_2 l'espressione ricavata precedentemente si ottiene:

$$\begin{split} S_{\Delta T=0} &= -V_{I} \cdot \frac{\alpha \cdot R_{2}}{R_{T0}} + V_{I} \cdot \frac{R_{T0} + R_{2}}{R_{2}} \cdot \frac{\alpha \cdot R_{2}}{R_{T0}} \\ \Rightarrow V_{I} &= \frac{S_{\Delta T=0}}{\left(\frac{R_{T0} + R_{2}}{R_{2}} - I\right) \cdot \frac{\alpha \cdot R_{2}}{R_{T0}}} = \frac{0.5}{\left(\frac{I + I0}{I0} - I\right) \cdot \frac{0.05 \cdot I0}{I}} = 10V \end{split}$$

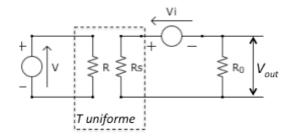
Per il calcolo di V_2 è sufficiente sostituire il valore di V_1 nella prima condizione:

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{R_T + R_2}{R_2} = 10 \cdot \frac{1 + 10}{10} = 11V$$

8

Nel circuito in figura la resistenza R è alimentata da una batteria di tensione V; la resistenza R è inoltre caratterizzata da un coefficente di dissipazione termica δ nei confronti dell'ambiente. Un sensore RTD è termicamente accoppiato con la resistenza R e ne condivide il valore di temperatura. L'intero circuito è posto in un ambiente di capacità termica infinita posto a temperatura T_A costante. Nella soluzione si trascuri il self-heating del sensore.

- Scrivere la relazione tra la tensione V_{out} e la tensione V
- Scrivere la espressione della sensibilità di V₀ nei confronti di V
- Calcolare la risoluzione di V_i nell'intorno di V=1 V considerando un errore nella misura di V₀ pari a 1mV.



$$R = 100 \ \Omega; \delta = 10 \ \frac{mW}{^{\circ}C}; T_{A} = 25^{\circ}C$$

$$R_{T} = R_{0} \cdot \left[I + \alpha \cdot (T - T_{0}) \right];$$

$$R_{0} = 50 \ \Omega; \alpha = 0.05^{\circ}K^{-1}; T_{0} = 0^{\circ}C$$

$$V_{i} = I \ V$$

La corrente che scorre nella resistenza R innalza il valore della temperatura della resistenza rispetto all'ambiente circostante della seguente quantità (self-heating)

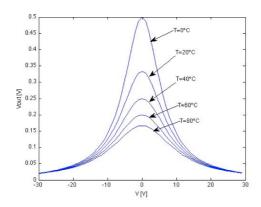
$$\Delta T_{SH} = T - T_A = \frac{P_{el}}{\delta} = \frac{V^2}{R \cdot \delta}$$

La tensione V_{out} è funzione della temperature di R attraverso la seguente espressione:

$$V_{out} = V_i \cdot \frac{R_0}{R_0 + R_0 \cdot \left[1 + \alpha \cdot \left(\Delta T_{SH} + T_A [^{\circ}C]\right)\right]}$$

Sostituendo il valore di T si ottiene:

$$V_{out} = V_i \cdot \frac{1}{2 + \alpha \cdot \left(\frac{V^2}{R \cdot \delta} + T_A\right)}$$



Per calcolare la sensibilità nei confronti di V, si applica la definizione di sensibilità:

$$S = \frac{dV_{out}}{dV} = -V_i \cdot \frac{2 \cdot \alpha \cdot V}{R \cdot \delta} \frac{1}{\left[2 + \alpha \cdot \left(\frac{V^2}{R \cdot \delta} + T_A\right)\right]^2}$$

Si noti che per V=0 si ha S=0.

Ad esempio nell'intorno di V=1V $\Rightarrow \Delta T_{SH} = \frac{V^2}{R \cdot \delta} = \frac{1^2}{100 \cdot 10^{-3}} = 10^{\circ}C$

$$S_{V=IV} = -1 \cdot \frac{2 \cdot 0.05 \cdot 1}{100 \cdot 10^{-3}} \frac{1}{\left[2 + 0.05 \cdot \left(\frac{1^2}{100 \cdot 10^{-3}} + 25\right)\right]^2} = -71 \frac{mV}{V}$$

9

Si consideri un termistore NTC la cui resistenza a T=0°C è pari a 20 K Ω e caratterizzato da un parametro B=3350 K. Si supponga di accoppiare termicamente il sensore ad un corpo di temperatura T=50°C e sia δ =10⁻³ W/K il coefficiente di dissipazione termica. Si calcoli l'errore di self-heating quando il sensore è alimentato da un corrente di 1 mA.

Per agevolare il calcolo è opportuno linearizzare la caratteristica del termistore nell'intorno di T=50°C=323K.

$$\begin{split} R_T &= R_{T_0} \cdot exp\left(B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right) = 20 \cdot exp\left(3350 \cdot \left(\frac{1}{323} - \frac{1}{273}\right)\right) = 2.992 \ K\Omega \\ \alpha &= -\frac{B}{T^2} = -\frac{3350}{323^2} = -0.032 \ K^{-1} \end{split}$$

La variazione di temperatura provocata dal self-heating è pari a: $\Delta T = \frac{R \cdot I^2}{\delta}$. La

resistenza del sensore nell'intorno di 323K vale: $R=R_{323}\cdot \left(1+\alpha\cdot \Delta T\right)$. Unendo le due espressioni si ottiene:

$$\Delta T = \frac{R \cdot I^2}{\delta} = \frac{R_{323} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \cdot I^2}{\delta}$$

 $da\ cui:$

$$\Delta T = \frac{\frac{R_{323} \cdot I^2}{\delta}}{1 - \alpha \cdot \frac{R_{323} \cdot I^2}{\delta}} = \frac{\frac{2992 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}}}{1 + 0.032 \cdot \frac{2992 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}}} = 2.7 \ K$$

Il calcolo è stato eseguito linearizzando la caratteristica del termistore, per verificare la liceità della approssimazione si possono confrontare i valori di resistenza del termistore a ΔT =4.6K.

Caratteristica "esatta":

$$R_{323+2.7}^{es} = 20 \cdot exp \left(3350 \cdot \left(\frac{1}{323+2.7} - \frac{1}{273} \right) \right) = 2.746 \ K\Omega$$

caratteristica approssimata:

$$R_{323+2.7}^{app} = 2.992 \cdot (1 - 0.032 \cdot 2.7) = 2.730 K\Omega$$

L'errore relativo di approssimazione è:

$$\frac{R^{es} - R^{app}}{R^{es}} = 0.005$$

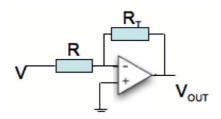
Con un errore pari a 0.5% il calcolo approssimato si può ritenere accettabile.

10

Nel circuito in figura, la resistenza R_T è un sensore RTD. Considerando l'op amp ideale calcolare il valore massimo della batteria V che da luogo ad un errore di self-heating ΔT_{SH} <0.5 K.

$$R_T = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T); \quad R_0 = 100\Omega; \quad \alpha = 0.005 \, K^{-1}; \quad \delta = 10^{-3} \, \frac{W}{K}$$

$$R = 50\Omega$$



Si valuta l'errore di self-heating e si determina il valore della tensione di alimentazione V in corrispondenza della quale si ha ΔT_{SH} =0.5K.

$$\Delta T_{SH} = \frac{P_{el}}{\delta} = \frac{R_T \cdot I^2}{\delta}$$

$$I = \frac{V}{R}; R_T = R_0 \cdot (I + \alpha \cdot \Delta T_{SH})$$

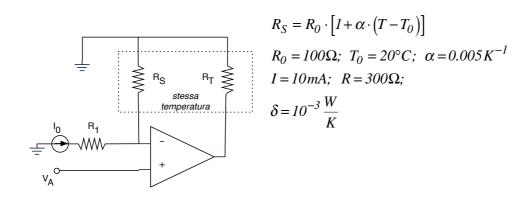
$$\Delta T_{SH} = \frac{R_0 \cdot (I + \alpha \cdot \Delta T_{SH})}{\delta} \cdot \frac{V^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{R^2 \cdot \delta \cdot \Delta T_{SH}}{R_0 \cdot (I + \alpha \cdot \Delta T_{SH})}} = \sqrt{\frac{50^2 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5}{100 \cdot (I + 0.005 \cdot 0.5)}} = 111 mV$$

11

Nel circuito seguente la resistenza R_S è un sensore RTD. Il sensore è accoppiato termicamente ad una resistenza R. La resistenza R scambia calore con l'ambiente circostante (posto a temperatura costante T_A) attraverso un coefficente di dissipazione termica δ . Si consideri l'amplificatore operazionale ideale.

- Illustrare il funzionamento del circuito
- Calcolare il valore della tensione V che consente di portare la temperatura della resistenza R a T=70°C.



L'op amp ideale controreazionato fornisce un valore di tensione d'uscita necessario a mantenere uguale a 0 la caduta di tensione attraverso i morsetti di ingresso. Poichè il terminale d'ingresso positivo è posto a tensione costante V, anche il potenziale di ingresso invertente dovrà trovarsi alla stessa tensione. Quindi

$$V = R_{S} \cdot I = R_{0} \cdot \left[1 + \alpha \cdot \left(T - T_{0}\right)\right] \cdot I$$

dove T è la temperatura della resistenza R. Pertanto grazie all'op amp la tensione V controlla la temperatura della resistenza R.

Le considerazioni precedenti valgono solo se l'op.amp è controreazionato. Nel circuito in questione, la controreazione è di tipo termoelettrico. Infatti, ad un aumento della tensione d'uscita consegue un aumento della temperatura della resistenza R, e quindi un aumento della resistenza del sensore e un aumento della tensione al morsetto invertente. Si osservi che la reazione negativa è assicurata solo nel caso in cui il sensore è di tipo PTC.

Per portare la temperatura di R a T=70°C è quindi necessaria una tensione V pari a:

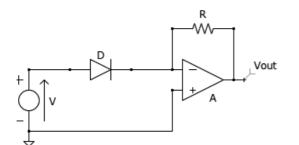
$$V = 100 \cdot \left[1 + 0.005 \cdot \left(70 - 20 \right) \right] \cdot 0.01 = 1.25V$$

12

Si consideri il seguente circuito che comprende un diodo sensibile alla temperatura la cui relazione I=f(V,T) è data dalla seguente espressione:

$$I(V,T) = k \cdot T^{3} \cdot exp \left[\frac{\alpha}{T} (V - V_{0}) \right]$$

Supponendo di misurare la tensione V_{out} con un errore di 1 mV si calcoli la risoluzione nei confronti della temperatura nell'intorno di T=350K. (OpAmp ideale).



$$k = 1 \frac{nA}{K^3};$$
 $\alpha = 11 \cdot 10^3 \frac{K}{V};$
 $V_0 = 1.12V;$ $R = 1K\Omega;$
 $V = IV$

Grazie alle proprietà dell'op.amp. ideale la tensione d'uscita è pari a:

$$V_{out} = -R \cdot I_{diodo} = -R \cdot k \cdot T^3 \cdot \exp \left| \frac{\alpha}{T} (V - V_0) \right|$$

Per valutare la risoluzione è necessario calcolare la sensibilità della tensione d'uscita nei confronti della temperatura:

$$S = \frac{dV_{out}}{dT} = -R \cdot k \cdot T \cdot \exp\left[\frac{\alpha}{T} \cdot (V - V_0)\right] \cdot \left[3 \cdot T + \alpha \cdot (V - V_0)\right]$$

$$S_{T=350} = -10^3 \cdot 10^{-9} \cdot 350 \cdot \exp\left[\frac{11 \cdot 10^3}{350} \cdot (1 - 1.12)\right] \cdot \left[3 \cdot 350 + 11 \cdot 10^3 \cdot (1 - 1.12)\right] = -2.17 \frac{mV}{K}$$

Applicando la definizione di risoluzione si ottiene:

$$T_{ris,T=350} = \frac{V_{out,err}}{|S_{T=350}|} = \frac{1}{2.17} = 0.46K$$

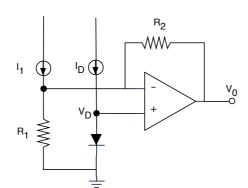
13

Un diodo PN al silicio è connesso nel circuito in figura.

La relazione I/V in funzione della temperatura del diodo è:

$$I(V,T) = G \cdot T^3 \cdot exp\left[\frac{\alpha}{T}(V - \Phi)\right]$$

- Calcolare R₂ affinché V₀=0 V per T=20°C
- Il coefficiente di dissipazione termica del diodo è δ =0.005 W/K, calcolare l'errore di selfheating nell'intorno di T=20°C.



G=0.25 A/K
3
; α =11000 K/V; Φ =1.12 V I $_1$ =1 mA I $_D$ =1 mA R $_1$ =1 K Ω

La tensione ai capi del diodo è pari a:

$$V_D = \Phi + \frac{T}{\alpha} ln \left(\frac{I_1}{GT^3} \right)$$

la somma delle correnti al nodo invertente del op-amp è:

$$I_1 = \frac{V_D}{R_1} + \frac{V_D - V_0}{R_2}$$

da cui:

$$V_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_D - R_2 I_1$$

A T=20°C (T=293 K) la tensione ai capi del diodo è V_D =0.519 V, imponendo V_0 =0 V si ottiene la condizione su R_2 :

$$R_2 = \frac{V_D R_1}{R_1 I_1 - V_D} = \frac{0.519 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 10^{-3} - 0.519} = 1079 \ \Omega$$

L'errore di self-heating si calcola con la consueta formula

$$\Delta T_{SH} = \frac{P_{el}}{\delta} = \frac{V_D I_D}{\delta}$$

Poiché V_D è una funzione non lineare di T, per risolvere l'equazione è necessario linearizzare la caratteristica del diodo nell'intorno di $T=20^{\circ}C=293$ K:

$$V_D = V_{293} + \left[\frac{dV_D}{dT}\right]_{293} (T - 293)$$

$$V_{293} = 0.519 \ V$$

$$\left[\frac{dV_D}{dT} \right]_{293} = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left(\frac{I_D}{GT^3} \right) - \frac{3}{\alpha} = -0.0023 \ V/K$$

$$V_D = 0.519 - 0.0023 \cdot (T - 293)$$

L'errore di self-heating, che corrisponde a T-293, è quindi pari a:

$$\Delta T_{SH} = \frac{I_D \cdot [V_{293} - \alpha \cdot \Delta T_{SH}]}{\delta}$$

$$\Delta T_{SH} = \frac{V_{293} \cdot I_D}{\delta + \alpha I_D} = \frac{0.519 \cdot 10^{-3}}{0.005 + 0.002310^{-3}} = 0.10K$$

Si noti che l'errore di self heating è piccolo rispetto alla sensibilità del diodo e lo stesso risultato si sarebbe ottenuto considerando la tensione del diodo costante

$$\Delta T_{SH} = \frac{V_D I_D}{\delta} = \frac{0.519 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 0.10 \text{ K}$$

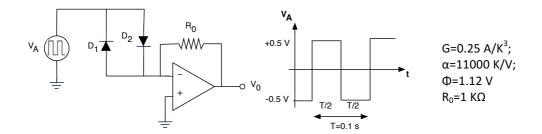
14

Due diodi identici, connessi nel circuito in figura, sono utilizzati come sensori di temperatura. D_1 è applicato alla temperatura T_1 e D_2 alla temperatura T_2 .

La relazione I/V in funzione della temperatura dei due diodi è:

$$I(V,T) = G \cdot T^3 \cdot exp \left[\frac{\alpha}{T} \left(V - \Phi \right) \right]$$

• Calcolare il valore medio della tensione V₀ quando T₁=20°C e T₂=30°C.



La tensione V_A polarizza alternativamente i diodi in diretta e in inversa. La condizione $V_A>0$ polarizza in diretta D2 mentre la condizione $V_A>0$ polarizza in diretta D1. Trascurando le correnti inverse dei diodi le tensioni V_0 corrispondenti ai due livelli di V_A

$$V_A = +0.5 \ V \to V_0 = -R_0 I_{D2} = -R_0 G T_2^3 \cdot exp\left(\frac{\alpha}{T_2}(V - \Phi)\right) = -1.167 \ V$$

$$V_A = -0.5 \ V \to V_0 = R_0 I_{D1} = -R_0 G T_1^3 \cdot exp\left(\frac{\alpha}{T_1}(V - \Phi)\right) = 0.489 \ V$$

La caratteristica del diodo è calcolata in polarizzazione diretta quindi V è sempre positiva.

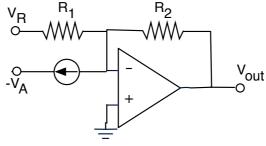
poichè l'onda quadra è simmetrica, il valore medio è pari alla media dei due valori estremi di tensione

$$\bar{V}_0 = \frac{V_0^+ + V_0^-}{2} = \frac{-R_0 I_{D2} + R_0 I_{D1}}{2} = \frac{-1.167 + 0.489}{2} = -0.338 \text{ V}$$

15

Si consideri il circuito seguente che comprende un sensore AD590 (indicato con il generatore di corrente I_T caratterizzato da una caratteristica $I=\mu T$, con $\mu=1\mu A/K$. Si calcoli il valore delle resistenze R_1 ed R₂ affinchè il segnale V_{out} sia direttamente proporzionale alla temperatura in gradi celsius (V₀=0V per T=0°C) con sensibilità pari a 10mV/°C.

 $V_R=10V e V_A<4V$.



Con il valore di V_A indicato il sensore AD590 eroga una corrente proporzionale alla temperatura. Al nodo del terminale invertente si sommano quindi le seguenti correnti:

$$-I_T + \frac{V_R}{R_1} + \frac{V_{out}}{R_2} = 0$$

da cui sostituendo la caratteristica del sensore e risolvendo per $V_{
m out}$ si ottiene:

$$V_{out} = \mu \cdot T \cdot R_2 - \frac{R_2}{R_1} V_R$$

Imponendo la condizione
$$V_{out}$$
=0 per T =0°C=273 K si determina la resistenza R_1 : $0=\mu\cdot T-\frac{1}{R_1}V_R\to R_1=\frac{V_R}{\mu\cdot T}=\frac{10}{10^{-6}\cdot 273}=36.6~K\Omega$

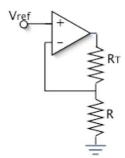
Per determinare la resistenza R_2 si impone la condizione sulla sensibilità:

$$S = \frac{dV_{out}}{dT} = \mu \cdot R_2$$

$$R_2 = \frac{S}{\mu} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = 10 \ K\Omega$$

16

Nel circuito in figura, la resistenza R_T è un termistore a semiconduttore che scambia calore, con una costante termica δ con un corpo di capacità termica infinita inizialmente (V_{ref} =0) posto a T_{inizio} =40°C. Si determini il valore della tensione V_{ref} che consente di mantenere la temperatura del sensore costante a T=60°C.



Si consideri l'op.amp ideale.
$$R_T = R_0 \cdot exp \left[B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]; R_0 = 10K\Omega; \ B = 4000K; \ T_0 = 20^{\circ}C$$

$$R = 1K\Omega$$
; $\delta = 0.01 \frac{W}{K}$

Grazie alla proprietà dell'op.amp ideale, la coppia di resistenze è percorsa dalla seguente corrente:

$$I = \frac{V_{ref}}{R}$$

grazie a questa corrente, il termistore presenta una temperatura di self-heating all'equilibrio pari a:

$$T_{fine} = T_{inizio} + \frac{P_{el}}{\delta}$$

poichè la resistenza del termistore si modifica con la temperatura, per risolvere l'equazione precedente è opportuno linearizzare la caratteristica del termistore nell'intorno di $T_{\rm fine}$

$$T_{inizio} = 273 + 60 = 333K$$

$$R_{298} = 10 \cdot \exp\left(4000 \cdot \left(\frac{1}{333} - \frac{1}{293}\right)\right) = 1.94 K\Omega$$

$$\alpha = -\frac{B}{T^2} = -\frac{4000}{333^2} = -0.036 K^{-1}$$

La variazione di temperatura dovuta al self-heating è quindi, all'equilibrio, pari a:

$$\Delta T = \frac{R_{298} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \Delta T\right) \cdot I^2}{\delta} = \frac{R_{298} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \Delta T\right)}{\delta} \cdot \frac{V_{ref}^2}{R^2}$$

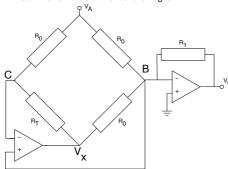
Da cui, considerando che ΔT =20K, si ricava il valore di V_{ref} richiesto:

$$V_{ref} = \sqrt{\frac{R^2 \cdot \delta \cdot \Delta T}{R_{298} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \Delta T\right)}} = \sqrt{\frac{1000^2 \cdot 0.01 \cdot 20}{1940 \cdot \left(1 - 0.036 \cdot 20\right)}} = 0.6V$$

17

Nel circuito in figura, R_T è una RTD connessa in un circuito a ponte condizionato da due amplificatori operazionali ideali.

• Scrivere la relazione tra V₀ e T



$$V_A$$
=5 V R_0 =100 Ω R_T = R_0 (1+ α (T- T_0)) con α = 0.001 K^{-1} , T_0 =20°C

Il nodo B è in condizioni di massa virtuale (V_B=0). V₀ si calcola dall'equazione delle correnti in B $\frac{V_A}{R_0}+\frac{V_0}{R_1}+\frac{V_x}{R_0}=0 \to V_0=-\frac{R_1}{R_0}(V_A+V_x)$

 V_X si calcola dalla condizione di massa virtuale del secondo op amp (V_C = V_B =0).

$$\frac{V_A}{R_0} = -\frac{V_x}{R_T} \to V_x = -V_A \frac{R_T}{R_0} = -V_A \cdot [1 + \alpha(T - T_0)]$$

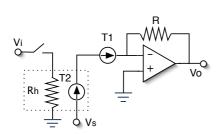
Sostituendo in V_0 :

$$V_0 = -\frac{R_1}{R_0}[V_A - V_A \cdot [1 + \alpha(T - T_0)]] = \frac{R_1}{R_0}V_A\alpha(T - T_0)$$

18

Nel circuito in figura due sensori di temperatura AD590 sono termicamente connessi uno ad un bagno termico a temperatura costante T_1 e l'altro ad una resistenza R_h . Ad interruttore aperto la resistenza R_h si trova a temperatura $T_2 < T_1$. La resistenza R_h scambia calore con l'ambiente attraverso una costante di dissipazione termica δ e una costante di tempo termica τ .

Si disegni l'andamento nel tempo della tensione V_0 prima e dopo la chiusura dell'interruttore. Si calcolino i valori iniziale (interruttore aperto) e finale della tensione V_0 .



sensibilità dell'AD590:
$$\mu=1\mu A$$
 / K
$$T_{_{1}}=30^{\circ}C; T_{_{2,OFF}}=10^{\circ}C$$

$$V_{_{S}}=8V; R=100\Omega$$

$$V_{_{i}}=5V; R_{_{h}}=100\Omega; \delta=10^{-2}\frac{W}{K}; \tau=1s$$

Il sensore AD590 eroga un segnale proporzionale alla temperatura quando è polarizzato con $V_s>4V$. L'andamento nel tempo della temperatura dovuto al self-heatina è:

$$T = T_{iniziale} + \Delta T \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Due sensori AD590 connessi in serie non possono contemporaneamente funzionare come generatori di corrente, pertanto il sensore a temperatura minore eroga la corrente proporzionale alla temperatura, mentre la caduta di tensione sul secondo sensore è inferiore a 4V.

Ad interruttore aperto quindi la tensione V_0 è a pari a:

$$V_0^{OPEN} = -\mu \cdot T_2 \cdot R = -10^{-6} \cdot (273 + 10) \cdot 10^3 = 0.283V$$

dopo la chiusura dell'interruttore la resistenza R_h inizia a riscaldarsi con legge esponenziale raggiungendo all'equilibrio il valore:

$$T_2^{finale} = T_2^{inizio} + \frac{V_i^2}{R_h \cdot \delta} = 10 + \frac{5^2}{10^2 \cdot 10^{-2}} = 35^{\circ}C$$

Fintanto che la temperatura T_2 si mantiene inferiore a T_1 la tensione d'uscita è proporzionale a T_2 e segue l'andamento esponenziale di crescita della stessa. Quando la temperatura T_2 supera T_1 il funzionamento dei sensori si inverte e la corrente erogata inizia ad essere proporzionale a T_1 .

Il tempo di scatto si ottiene quando $T_2 = T_1 = 30$ °C.

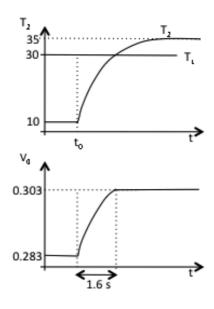
$$T_{2} = T_{2}^{inizio} + \Delta T_{equil} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

$$t = -\tau \cdot \ln\left[1 - \frac{T_{2} - T_{2}^{inizio}}{\Delta T_{equil}}\right] = -1 \cdot \ln\left[1 - \frac{30 - 10}{25}\right] = 1.6s$$

Infine il valore finale di V_0 è pari a:

$$V_0^{CLOSE} = -\mu \cdot T_1 \cdot R = -10^{-6} \cdot (273 + 30) \cdot 10^3 = 0.303V$$

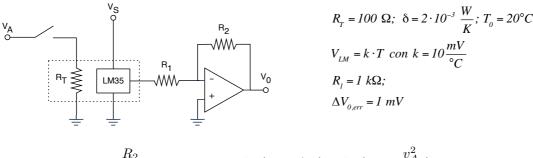
gli andamenti qualitativi delle temperature e della tensione d'uscita sono i seguenti:



19

Nel circuito in figura, la resistenza R_T , connessa ad un generatore di tensione V_A , scambia calore con l'ambiente attraverso una costante di dissipazione termica δ . La temperatura della resistenza, ad interruttore aperto pari a T_0 , è misurata da un sensore di temperatura integrato LM35, almentato con una tensione V_S positiva, la cui tensione di uscita è amplificata in V_0 .

- Scrivere la espressione di V₀ in funzione di V_A.
- Calcolare la resistenza R₂ che consente di misurare la tensione V_A con una risoluzione pari a 0.01 mV nell'intorno di V_A=1 V, quando la tensione V₀ viene misurata con un errore pari a 1 mV



$$V_0 = -\frac{R_2}{R_1} V_{LM35}; V_{LM35} = k \cdot (T_0 + \Delta T) = k \cdot (T_0 + \frac{v_A^2}{R_T \delta});$$

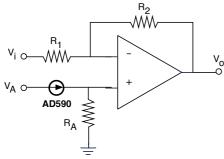
$$V_0 = -\frac{R_2}{R_1} k \cdot (T_0 + \frac{v_A^2}{R_T \delta}).$$

$$\begin{split} V_{Aris} &= \frac{V_{0err}}{\mid S \mid}; \\ S &= \frac{dV_0}{dV_A} = -\frac{2R_2kv_A}{R_1R_T\delta}; \\ V_{Aris} &= \frac{V_{0err}R_1R_T\delta}{2R_2kv_A}; R_2 = \frac{V_{0err}R_1R_T\delta}{V_{Aris}2kv_A} = \frac{10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0.01 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1} = 1M\Omega \end{split}$$

20

Nel circuito in figura V_i =0.5 V e V_A =10 V. Calcolare R_A ed il rapporto $G=R_2/R_1$ affinché V_0 sia proporzionale alla temperatura in scala Fahreneit con sensibilita 1 mV/°F e con V_0 =0 V per T=0°F. Considerare l'op amp ideale

La caratteristica dell'AD590 è $I_{T}{=}\mu T$ con $\mu{=}10^{\text{-}6}$ A/K e T in Kelvin.



In condizoni di idealità dell'op amp, la somma delle correnti al nodo invertente ottiene:

$$\frac{V_i - \mu T R_A}{R_1} = \frac{\mu T R_A - V_0}{R_2}$$

da cui si ricava V_{0:}

$$V_0 = -V_i \frac{R_2}{R_1} + \mu T R_A \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = -V_i \cdot G + \mu T R_A (1 + G)$$

La conversione tra Kelvin e gradi Fahreneit è pari a:

$$T_K = 273 + \frac{T_F - 32}{1.8}$$

Sostituendo in V_0 :

$$V_0 = -V_i \cdot G + \mu \left(273 + \frac{T_F - 32}{1.8}\right) R_A(1+G)$$

la sensibilità rispetto a T_F è quindi pari a:

$$S = \frac{dV_0}{dT_F} = \frac{\mu}{1.8} R_A (1 + G)$$

le due condizione dell'esercizio V_0 =0 per T_E =0 e S=1 mV/T_E danno luogo al seguente sistema:

$$\begin{cases} V_i \cdot G = \mu \left(273 - \frac{32}{1.8} \right) R_A (1+G) \\ S = \frac{\mu}{1.8} R_A (1+G) \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$\begin{cases} G = \frac{S}{V_i} 1.8 \left(273 - \frac{32}{1.8} \right) \\ R_A = \frac{1.8 \cdot S}{\mu} \frac{1}{1+G} \end{cases}$$

Con i dati del problema: G=0.91 e R_A =938 Ω

21

Sia data una termocoppia e si indichino con T_R e T_x le temperature alle giunzioni. Per tale termocoppia è noto, esclusivamente nell'intervallo 0 – 100 °C, il potere termoelettrico dato dalla seguente espressione.

$$PT = a \cdot T + b$$

con a=2 μ V/K² e b=200 μ v/K. Inoltre è noto sperimentalmente che quando T_R=0°C e T_x=-50°C la termocoppia eroga una tensione pari a -9mV.

Si calcoli la tensione della termocoppia per T_R =-50°C e T_x =70°C.

$$\{(V_{0 \leftarrow 50}) = -9mV \Rightarrow (V_{-50 \leftarrow 0}) = +9mV\}$$

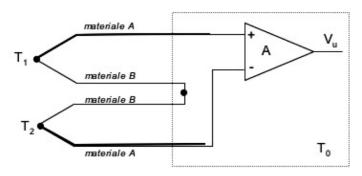
$$\begin{split} V_{out} &= (V_{-50+0}) + \int\limits_{273}^{343} (aT+b)dT = (V_{-50+0}) + \left[\frac{1}{2} \cdot a \cdot T^2 + b \cdot T \right]_{T=273}^{T=343} = \\ &= 9 + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2} \left(343^2 - 273^2 \right) + 200 \cdot 10^{-6} \cdot \left(343 - 273 \right) = 66 \, \text{mV} \end{split}$$

22

Si consideri il seguente circuito formato da due termocoppie formate da materiali A e B. Ciascuna termocoppia è caratterizzata da un potere termoelettrico [$PT = \frac{dE_{AB}}{dT}$] funzione della temperatura

secondo la seguente relazione: $PT = a + b \cdot T$ con a=50*10⁻⁶ V/K e b=2*10⁻⁶ V/K².

Considerando che l'amplificatore nel circuito è un amplificatore differenziale ideale con A=50 e che tutti i componenti nell'area segnata in grigio si trovano ad una temperatura T_0 costante, si calcoli la tensione in uscita quando T_1 =50°C e T_2 =100°C.



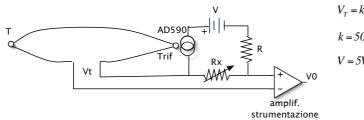
$$V = \int_{T_1}^{T_2} (a+b\cdot T) \cdot dT + \int_{T_2}^{T_2} (a+b\cdot T) \cdot dT = \left[a \cdot T + \frac{1}{2} \cdot b \cdot T^2 \right]_{T_1}^{T_2} + \left[a \cdot T + \frac{1}{2} \cdot b \cdot T^2 \right]_{T_2}^{T_2} =$$

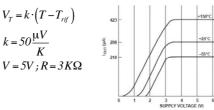
$$= a \cdot (T_2 - T_1) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot (T_2^2 - T_1^2) = 50 \cdot (373 - 323) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (373^2 - 323^2) = 37mV$$

23

Si consideri il circuito in figura in cui un sensore di temperatura integrato AD590 viene utilizzato per compensare il segnale V_0 dalla dipendenza dalla temperatura della giunzione di riferimento.

- Si calcoli il valore della resistenza R_X per la quale si ottiene la compensazione della temperatura di riferimento.
- Si valuti il valore massimo della temperatura del riferimento oltre la quale cessa la funzione di compensazione.





$$V_{out} = -R_X \cdot \mu \cdot T_{rif} - k \cdot (T - T_{rif}) = -k \cdot T + (k - R_X \cdot \mu) \cdot T_{rif}$$

indipendente da T_{rif} se:

$$k - R_X \cdot \mu = 0;$$
 $\Rightarrow R_X = \frac{k}{\mu} = \frac{50 \frac{\mu V}{K}}{1 \frac{\mu A}{K}} = 50\Omega$

Ponendo a $V_{AD590}>4V$ la condizione di corretto funzionamento del sensore si ottiene:

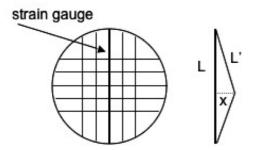
$$V - (R + R_X) \cdot \mu \cdot T > 4$$

$$\Rightarrow T_{lim} = \frac{V - 4}{(R + R_X) \cdot \mu} = \frac{5 - 4}{(3000 + 50) \cdot 10^{-6}} = 327K = 54^{\circ}C$$

24

Si consideri una racchetta da tennis circolare del diametro L=40 cm in cui una delle corde è rimpiazzata da una strain gauge con K=100 ($\frac{\Delta R}{R} = K \cdot \mathcal{E}$) connessa in un ponte di Wheatstone alimentato con V=5 V e bilanciato per \blacksquare 0. Si calcoli, nel regime di piccole deformazioni, la dipendenza della tensione di uscita del ponte dallo spostamento centrale delle corde della racchetta. (Si consideri lineare la deformazione della corda).

Calcolare la sensibilità nell'intorno di x=1mm e x= 1 cm.



la deformazione della strain gauge è: $\varepsilon = \frac{L' - L}{L}$

considerando il triangolo rettangolo si ha:

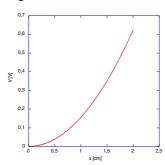
$$\frac{L'}{2} = \sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{2}{L} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}} - 1$$

In un ponte di Wheatstone quarter bridge si ha:

$$\begin{aligned} v_{out} &= \frac{V}{4} \cdot k \cdot \varepsilon \Rightarrow v_{out} = \frac{V}{4} \cdot k \cdot \left[\frac{2}{L} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}} - 1 \right] \Rightarrow v_{out} = \frac{5}{4} \cdot 100 \cdot \left[\frac{2}{40} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{40^2}{4}} - 1 \right] \\ &\Rightarrow v_{out} = 125 \cdot \left[0.05 \cdot \sqrt{x^2 + 400} - 1 \right] \left[x \ in \ cm \right] \end{aligned}$$

$$S = \frac{dv_{out}}{dx} = 125 \cdot 0.05 \frac{2 \cdot x}{\sqrt{x^2 + 400}} \Rightarrow S_{x=1mm} = 6.25 \frac{2 \cdot 0.1}{\sqrt{0.1^2 + 400}} = 62 \frac{mV}{cm}$$
$$S_{x=1cm} = 6.25 \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 400}} = 625 \frac{mV}{cm}$$

togliere il 2



25

Siano dati un termistore con B=4000K e $R_{(T=10^{\circ}C)}$ =8K Ω ed una strain gauge con K=2, $TCR_{T=10^{\circ}C}$ =4*10⁻³ °C⁻¹ e R_{SG0} =100 Ω . Si calcolino il TCR ed il fattore di gauge della serie dei due sensori nell'intorno di T=10°C ed ϵ =0.

Si linearizzi il termistore nell'intorno di T=10°C. Quindi R_{T0} =8 $K\Omega$ e

$$\alpha = -\frac{B}{T^2} = -\frac{4000}{283^2} = -0.05 \, K^{-1}$$
. Il termistore quindi è rappresentato da

 $R_{\!\scriptscriptstyle T} = R_{\!\scriptscriptstyle T0} \cdot \left(1 - \alpha \cdot \Delta T\right)$ mentre la strain gauge è caratterizzata da:

 $R_{SG}=R_{SG0}\cdot \left(I+K\cdot \varepsilon+TCR\cdot \Delta T\right)$. La serie dei due sensori produce un nuovo sensore con la seguente caratteristica:

$$\begin{split} R_{\textit{SERIE}} &= R_{\textit{SG}} + R_{\textit{T}} = R_{\textit{SGO}} \cdot \left(1 + K \cdot \varepsilon + TCR \cdot \Delta T \right) + R_{\textit{TO}} \cdot \left(1 - \alpha \cdot \Delta T \right) = \\ &= \left(R_{\textit{SGO}} + R_{\textit{TO}} \right) + R_{\textit{SGO}} \cdot K \cdot \varepsilon + \left(R_{\textit{SGO}} \cdot TCR - R_{\textit{TO}} \cdot \alpha \right) \cdot \Delta T \end{split}$$

Il coefficiente di temperatura è auindi dato da:

$$TCR_{SERIE} = \frac{1}{R_{SERIE}} \cdot \frac{dR_{SERIE}}{d\Delta T} = \frac{1}{R_{SG0} + R_{T0}} \cdot \left(R_{SG0} \cdot TCR - R_{T0} \cdot \alpha \right) =$$

$$= \frac{1}{100 + 8000} \cdot \left(100 \cdot 4 \cdot 10^{-3} - 8000 \cdot 0.05 \right) = 0.049 \, \text{K}^{-1}$$

ed il fattore di Gauge:

$$GF_{SERIE} = \frac{1}{R_{SERIE}} \cdot \frac{dR_{SERIE}}{d\varepsilon} = \frac{1}{R_{SG0} + R_{T0}} \cdot (R_{SG0} \cdot K) =$$

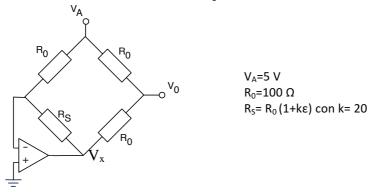
$$= \frac{1}{100 + 8000} \cdot 100 \cdot 2 = 0.02$$

In conclusione il sensore cosituito dalla serie di strain gauge e termistore mantiene la sensibilità alla temperatura del termistore mentre la sensibilità alla deformazione viene praticamente annullata. Nella serie quindi prevale il termistore. Si noti che l'effetto è dovuto alla elevata resistenza a riposo del termistore.

26

Nel circuito in figura, R_S è una strain gauge connessa in un circuito a ponte condizionato da un amplificatore operazionale ideale.

- Scrivere la relazione tra V₀ e ε
- Calcolare l'errore minimo di misura di V_0 che assicura una risoluzione di ϵ pari a 10^{-4} .



La tensione di uscita è il partitore tra due resistenze uguali:

$$V_0 = \frac{V_A + V_x}{2}$$

Per calcolare V_x, consideriamo l'operazionale in configurazione invertente:

$$I_{1} = I_{2}$$

$$\frac{V_{A}}{R_{0}} = -\frac{V_{x}}{R_{S}}$$

$$V_{x} = -V_{A} \frac{R_{S}}{R_{0}}$$

Sostituendo V_X si determina la relazione tra $V_0\, ed\, \epsilon$

$$V_{0} = \frac{1}{2} \left(V_{A} - V_{A} \frac{R_{S}}{R_{0}} \right) = \frac{V_{A}}{2} \left(1 - \frac{R_{S}}{R_{0}} \right)$$
$$V_{0} = \frac{V_{A}}{2} \left(1 - \frac{R_{0}(1 + k\epsilon)}{R_{0}} \right) = -\frac{V_{A}}{2} k\epsilon$$

Si noti che l'uscita del ponte eccede il valore della alimentazione $V_{A\nu}$ in pratica l'operazionale oltre a linearizzare la relazione con lo strain impone i limiti di variabilità di $V_{0.}$

Per il calcolo dell'errore di lettura si procede applicando la formula della risoluzione

$$S = \frac{dV_0}{d\epsilon} = -\frac{V_A}{2}k$$

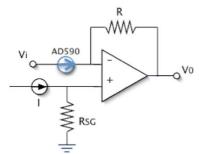
$$\epsilon_{ris} = \frac{\Delta V_{0,err}}{|S|}$$

$$\Delta V_{0,err} = \frac{V_a \cdot k \cdot \epsilon_{ris}}{2} = 5 \ mV$$

27

Nel circuito in figura, la resistenza R_{SG} è una strain gauge metallica sensibile sia alla deformazione che alla temperatura. Il sensore AD590 si trova alla stessa temperatura della strain gauge.

- Calcolare il valore della resistenza R che assicura la indipendenza del segnale d'uscita V₀ dalla temperatura.
- Calcolare la sensibilità del segnale V₀ rispetto alla deformazione.



Si consideri l'op.amp ideale.

$$R_{SG} = R_0 \cdot \left[1 + k \cdot \varepsilon + \alpha \cdot (T - T_0) \right]$$

$$R_0 = 50\Omega; \quad k = 2; \quad \alpha = 10^{-3} K^{-1}; \quad T_0 = 25^{\circ}C$$

$$I = 1mA; \quad I_{AD590} = \mu \cdot T; \quad \mu = 1 \frac{\mu A}{K}; \quad V_i = -6V$$

Grazie alle proprietà dell'op.amp si ha la seguente relazione:
$$\mu \cdot T = \frac{R_{SG} \cdot I - V_0}{R}; \quad \mu \cdot T = \frac{R_0 \cdot [1 + k \cdot \epsilon + \alpha \cdot (T - T_0)] \cdot I - V_0}{R}$$

$$V_0 = R_0 \cdot Ik \cdot \epsilon + (R_0 \cdot I \cdot \alpha - R \cdot \mu) \cdot T + R_0 \cdot I \cdot (1 - \alpha \cdot T_0)$$

la tensione d'uscita è indipendente da T se:

$$R_0 \cdot I \cdot \alpha - R \cdot \mu = 0 \implies R = \frac{R_0 \cdot I \cdot \alpha}{\mu} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = 50\Omega$$

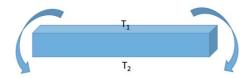
La sensibilità rispetto alla deformazione è pari a:

$$S = \frac{dV_0}{d\varepsilon} = R_0 \cdot I \cdot k = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 2 = 100 \frac{mV}{\varepsilon}$$

28

Si vuole misurare la deformazione di una trave sottoposta a flessione. Le due superfici, inferiore e superiore, sono poste a temperature differenti. Per la misura sono a disposizione 4 strain gauge uguali (Sensibili sia alla deformazione che alla temperatura). Disegnare un circuito di misura in modo da produrre un segnale di uscita di sensibilità massima rispetto alla deformazione e nulla rispetto alla differenza di temperatura.

Se il segnale d'uscita viene misurato con un errore pari 1 mV calcolare la tensione di alimentazione (V_A) che assicura una risoluzione dello strain pari a 10⁻⁴



Per cancellare la dipendenza da T e conservare la dipendenza da ϵ è conveniente posizionare due gauges per faccia, una nel verso della deformazione e una ortogonale. In questo modo le quattro gauge presentano le seguenti dipendenze da ϵ e T

$$R_1 = R_0 \cdot (1 + k \cdot \epsilon + \alpha T_1)$$

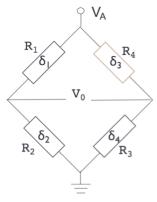
$$R_2 = R_0 \cdot (1 - k \cdot \nu \epsilon + \alpha T_1)$$

$$R_3 = R_0 \cdot (1 - k \cdot \epsilon + \alpha T_2)$$

$$R_4 = R_0 \cdot (1 + k \cdot \nu \epsilon + \alpha T_2)$$

Ricordando che in un ponte full-bridge se $\delta \ll 1 \ V_0 = V_A(\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \delta_4)$

il modo opportuno di montare la gauge sul ponte e':

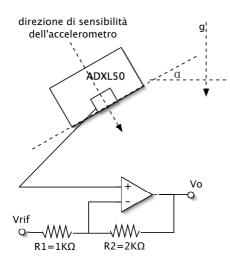


$$V_0 = V_A \frac{1}{4} [(k \cdot \epsilon + \alpha T_1) - (-k \cdot \nu \epsilon + \alpha T_1) + (k \cdot \nu \epsilon + \alpha T_2) - (-k\epsilon + \alpha T_2)]$$
$$V_0 = V_A k \frac{1}{2} (1 + \nu) \epsilon$$

$$\Delta \epsilon_{ris} = \frac{\Delta V_{0,err}}{S} = \frac{2\Delta V_{0,err}}{V_A k (1+\nu)}$$

$$V_A = \frac{2\Delta V_{0,err}}{\Delta \epsilon_{ris} k (1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{10^{-4} \cdot 3 (1+0.3)} = 5.12 \ V$$

29



Si consideri una accelerometro ADXL50 utilizzato per misurare l'inclinazione di un corpo. L'accelerometro fornisce una tensione d'uscita pari a:

$$V(a) = V_0 + a \cdot K$$
 $V_0 = 1.8V$; $K = 0.019 \frac{V}{g}$

tale segnale viene inviato al circuito mostrato in figura (op.amp ideale).

- Scrivere la relazione $V_0 = f(\alpha)$
- Calcolare il valore di V_{rif} affinchè V₀=1V per
 ≠30°.
- Calcolare l'errore nella lettura del segnale V che consente di misurare l'angolo di inclinazione con una risoluzione di 1° nell'intorno di 30°.

$$\begin{split} &V_{a} = V_{0} + K \cdot a = V_{0} + K \cdot g \cdot \cos \alpha \\ &\frac{V_{rif} - V_{a}}{R_{1}} = \frac{V_{a} - V_{out}}{R_{2}} \Longrightarrow V_{out} = \left(1 + \frac{R_{2}}{R_{1}}\right) \cdot V_{a} - \frac{R_{2}}{R_{1}} \cdot V_{rif} \\ &V_{out} = \left(1 + \frac{R_{2}}{R_{1}}\right) \cdot \left(V_{0} + K \cdot g \cdot \cos \alpha\right) - \frac{R_{2}}{R_{1}} \cdot V_{rif} \end{split}$$

$$V_{rif} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \left[\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \left(V_0 + K \cdot g \cdot \cos \alpha \right) - V_{out} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(1 + \frac{2}{1} \right) \cdot \left(1.8 + 0.019 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right] = 2.22V$$

$$\begin{aligned} V_{err} &= \alpha_{ris} \cdot \left| S_{\alpha = \frac{\pi}{6}} \right| \\ S &= \frac{dV_{out}}{d\alpha} = -\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot K \cdot g \cdot \sin \alpha \Rightarrow S_{\alpha = \frac{\pi}{6}} = -\left(1 + \frac{2}{1} \right) \cdot 0.019 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -28.5 \frac{mV}{rad} \\ \alpha_{ris} &= 1^\circ = 0.017 rad \\ V_{err} &= 0.017 \cdot 28.5 = 0.48 mV \end{aligned}$$

30



Nella immagine a sinistra è mostrato un piatto circolare di raggio r=10 cm tenuto in rotazione alla velocità angolare \$\mathscr{L}\$

Sul bordo della piatto è posizionato un accelerometro caratterizzato dalla seguente relazione:

$$V = V_0 + k \cdot a$$
 $\left[V_0 = 1.8V; \ k = 0.019 \frac{V}{g} \right]$

- Scrivere la relazione tra V e la velocità angolare
- Calcolare l'errore massimo consentito nella misura della tensione V che assicura nell'intorno = 10 rad/s una risoluzione pari a 0.05 rad/s

L'accelerometro è soggetto ad una accelerazione centrifuga pari a: $a=\omega^2\cdot r$

Pertanto la tensione di uscita del sensore è pari a:

$$V = V_0 + k \cdot \omega^2 \cdot r$$

Per calcolare l'errore di misura massimo tollerabile di V si applichi la definizione di sensibilità e risoluzione

$$S = \frac{dV}{d\omega} = 2 \cdot k \cdot \omega \cdot r$$

$$\omega_{ris} = \frac{V_{err}}{S_{\alpha > 10}} \Rightarrow V_{err} = \omega_{ris} \cdot 2 \cdot k \cdot \omega \cdot r = 0.05 \cdot 2 \cdot \frac{0.019}{9.8} \cdot 10 \cdot 0.1 = 0.2 mV$$

31

Si consideri un sensore di pressione differenziale la cui pressione di riferimento è realizzata da un gas che, a T=25°C, esercita la pressione di 1atm.

Il segnale in tensione del sensore è funzione della pressione attraverso la seguente relazione:

$$V = \frac{V_o}{2} \cdot (k_I \cdot \Delta P + k_2 \cdot \Delta P^2) \text{ con V}_o = 10 \text{V e k}_1 = 1 \text{ atm}^{-1}, \text{ k}_2 = 0.1 \text{ atm}^{-2}$$

Se la tensione minima misurabile è V_{err} =1 mV calcolare la variazione di temperatura del gas di riferimento che da luogo ad una variazione di pressione pari al valore minimo misurabile. (legge dei gas: $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ dove V, R, e n sono costanti)

La variazione di pressione minima misurabile coincide con il LOD pari a:

$$\Delta P_{LOD} = \frac{V_{err}}{S_0} = \frac{V_{err}}{\frac{V_0}{2} \cdot k_I} = \frac{10^{-3}}{\frac{10}{2} \cdot 1} = 0.5 \cdot 10^{-3} \, atm. \, \text{Scopo dell'esercizio è determinare}$$

la variazione di temperatura del gas che da luogo ad una variazione della pressione interna pari alla risoluzione. Poiché la legge dei gas perfetti è lineare, la variazione

suddetta è pari a: $\Delta T = \frac{V}{n \cdot R} \cdot \Delta P_{LOD}$. La costante V/nR si può calcolare conoscendo P

e T in uno stato:
$$\frac{V}{n \cdot R} = \frac{T_{25}}{P_I} = \frac{273 + 25}{I} = 298 \frac{K}{atm}$$
. Quindi la variazione di

temperatura richiesta vale: $\Delta T = 298 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 0.14 \, K$.

32

Si consideri un sensore di pressione differenziale il cui riferimento è costituito da una camera sigillata di volume pari a 10 ml nella quale è contenuta 10⁻³ mole di gas perfetto.

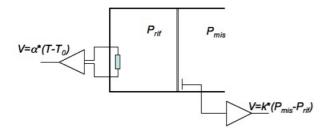
Tale sensore è parte di un circuito elettronico che fornisce la seguente tensione:

$$v = k \cdot (P_{mis} - P_{rif})$$
 con k= 1 V/atm.

Si supponga inoltre di misurare la temperatura del gas di riferimento con un sensore di temperatura che fornisce una tensione $v = \alpha \cdot (T - T_0)$ con $T_0 = 20$ °C.

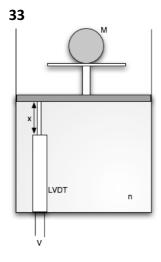
Si disegni (qualitativamente) un circuito elettronico in cui la tensione di uscita sia proporzionale a $(P_{mis}-P_0)$ dove P_0 è una pressione costante indipendente da T e si calcoli il valore di \checkmark che consente di ottenere questa condizione.

(R=0.082 (I atm)/(mol K)



supponiamo di sommare i due segnali con un circuito sommatore.

$$\begin{split} V_T &= k \cdot \left(P_{\textit{mis}} - P_{\textit{rif}}\right) + \alpha \cdot \left(T - T_0\right); \\ dalla \ \ legge \ \ dei \ \ gas \ \ perfetti : \ \ T = P_{\textit{rif}} \cdot \frac{V}{n \cdot R} \\ V_T &= k \cdot \left(P_{\textit{mis}} - P_{\textit{rif}}\right) + \alpha \cdot \left(P_{\textit{rif}} \cdot \frac{V}{n \cdot R} - T_0\right) = \ k \cdot P_{\textit{mis}} - k \cdot P_{\textit{rif}} + \alpha \cdot P_{\textit{rif}} \cdot \frac{V}{n \cdot R} - \alpha \cdot T_0 = \\ &= k \cdot P_{\textit{mis}} - P_{\textit{rif}} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{V}{n \cdot R} - k\right) - -\alpha \cdot T_0 \\ &= k \cdot P_{\textit{mis}} - P_{\textit{rif}} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{V}{n \cdot R} - k\right) - -\alpha \cdot T_0 \\ &= k \cdot P_{\textit{mis}} - P_{\textit{rif}} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{V}{n \cdot R} - k\right) - \alpha \cdot T_0 \\ &= k \cdot P_{\textit{mis}} - \alpha \cdot T_0 = k \cdot P_{\textit{mis}} - \frac{k \cdot n \cdot R}{V} \cdot T_0 = k \cdot \left(P_{\textit{mis}} - P_0\right) \\ &= k \cdot P_{\textit{mis}} - \alpha \cdot T_0 = \frac{10^{-3} \cdot 0.082}{10^{-3}} \cdot 293 = 24atm \end{split}$$



Nello schema a sinistra è mostrata una bilancia realizzata con un sensore di pressione operante alla pressione ambiente (P=1atm).

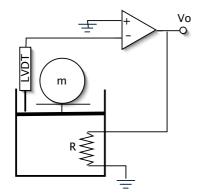
La cavità di riferimento contiene una densità gas perfetto $\thickapprox 2\ 10^3\ moli/m^3$ ed è mantenuta a temperatura T=300K. La membrana mobile ha un'area di 1 cm² e la posizione della membrana mobile è proporzionale alla differenza di pressione attraverso la seguente relazione x=k (P-P_{rif}) con k=1 μ m/Pa.

Lo spostamento della membrana mobile è trasdotto in un segnale elettrico da un sensore LVDT caratterizzato da una sensibilità S_{LVDT} =10 mV/mm.

- Scrivere la relazione tra il segnale V e la massa M
- Calcolare la risoluzione nella misura della massa M nel caso in cui V_{err} =0.1 mV.
- Calcolare la variazione di temperatura del sensore di pressione necessaria per bilanciare lo spostamento della membrana indotto da una massa M=1Kg.

$$\begin{split} V &= S_{LVDT} \cdot k \cdot \left(P_{amb} + \frac{M \cdot g}{A} - P_{rif} \right) = S_{LVDT} \cdot k \cdot \left(P_{amb} + \frac{M \cdot g}{A} - \rho \cdot R \cdot T \right) \\ S &= \frac{dV}{dM} = \frac{S_{LVDT} \cdot k \cdot g}{A} = \frac{10 \cdot 10^{3} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 9.8}{10^{-4}} = 980 \frac{mV}{Kg} \\ M_{ris} &= \frac{V_{err}}{S} = \frac{0.1}{980} = 0.1g \\ \frac{M \cdot g}{A} &= \rho \cdot R \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{M \cdot g}{A \cdot \rho \cdot R} = \frac{1 \cdot 9.8}{10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{3} \cdot 8.34} = 5.8K \end{split}$$

34



La bilancia è utilizzata in un ambiente standard (P=1atm e T=300K). Si consideri $T_{\rm gas}$ = $T_{\rm R}$

Si consideri una bilancia realizzata con un sensore di pressione differenziale a parete mobile. La cavità di riferimento contiene un gas che alla temperatura T=300K esercita una pressione di 1 atm.

La parete mobile ha un'area di 10 cm^2 . La posizione della parete è trasdotta in un segnale di tensione da un sensore tipo LVDT caratterizzato dalla seguente espressione V=k*x con k=10mV/mm. In assenza della massa m il sensore LVDT è in posizione di equilibrio (x=0).

Nella cavità è inoltre alloggiato un resistore di resistenza R=100 Ω in grado di scambiare calore con la cavità attraverso un coefficiente di dissipazione termica δ =10⁻³W/K.

Il resistore e il segnale del sensore LVDT sono connessi ad un op.amp. ideale secondo lo schema in figura.

- Scrivere la relazione V₀=f(m)
- Supponendo di voler misurare una massa minima pari a 1 g valutare l'errore massimo consentito nella misura della tensione V₀.

grazie all' azione dell' op.amp. controreazionato

$$V_{LVDT} = 0 \Rightarrow x = 0$$

la parete mobile è mantenuta nella stessa posizione dall'innalzamento di pressione causato dal riscaldamento della resistenza R

$$\Delta p = \frac{n \cdot R}{V} \cdot \Delta T = \alpha \cdot \Delta T$$

$$\Delta p = \frac{m \cdot g}{A}; \quad \Delta T = \frac{V_0^2}{R \cdot \delta}; \quad \alpha = \frac{P_{rif}}{T_{rif}} = \frac{1}{300} \frac{atm}{K}$$

$$\frac{m \cdot g}{A} = \alpha \cdot \frac{V_0^2}{R \cdot \delta} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{R \cdot \delta \cdot g}{A \cdot \alpha}} \cdot \sqrt{m} = k \cdot \sqrt{m}$$

$$k = \sqrt{\frac{R \cdot \delta \cdot g}{A \cdot \alpha}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8}{10 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1 \cdot 10^5}{300}}} = 1.71 \frac{V}{Kg^{1/2}}$$

$$\begin{split} S &= \frac{dV_0}{dm} = -\frac{k}{2 \cdot \sqrt{m}} \\ S_{m=1g} &= -\frac{1.71}{2 \cdot \sqrt{0.001}} = 27 \frac{V}{Kg} \Rightarrow V_{0,err} = m_{ris} \cdot S_{m=1g} = 0.001 \cdot 27 = 27 mV \end{split}$$

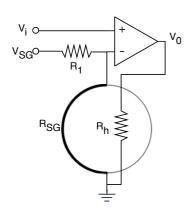
si osservi che il valore di V_0 in corrispondenza di m=1g è 54mV il doppio di V_{err}

35

Si consideri un pallone perfettamente sferico ed elastico è posto in un ambiente con pressione P=1atm e T=20°C. Sulla superficie del pallone è incollata una strain gauge di lunghezza uguale a metà della circonferenza. All'interno del pallone si trova una resistenza R_h che scambia calore con l'aria all'interno del pallone per mezzo di un coefficente di dissipazione δ . La strain gauge e la resistenza sono connessi nel circuito in figura dove V_{sg} è un generatore ideale di tensione, R è una resistenza costante e l'opamp è ideale.

In assenza di polarizzazione il volume del pallone è pari a 0.5 L si determini

- Calcolare il valore di V_i necessario per aumentare di un decimo il volume del pallone [V=0.01*0.5 L].
- Calcolare il corrispondente valore della tensione d'uscita dell'amplificatore.



$$V_{SG}$$
=1 V; R₁=100 Ω
R_{SG}=R₀·(1+k·ε); R₀=100 Ω; k=2
R_h=50 Ω; δ=10⁻² W/K

1.
$$V_{i} = V_{SG} \frac{R_{0}(1 + k\epsilon)}{R_{1} + R_{0}(1 + k\epsilon)}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta C}{C} = \frac{C_{fin}}{C_{in}} - 1$$

$$Vol = \frac{4}{3}\pi r^{3}; \quad C = 2\pi r; \quad C = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}(2\pi)^{3}} \cdot \sqrt[3]{V}$$

$$\epsilon = \sqrt[3]{\frac{Vol_{fin}}{Vol_{in}}} - 1 = \frac{1.1 \cdot Vol_{in}}{Vol_{in}} - 1 = 0.032$$

$$V_{i} = 1 \frac{100(1 + 2 \cdot 0.032)}{100 + 100(1 + 2 \cdot 0.032)} = 0.515 V$$

2.
$$p \cdot Vol_{fin} = n \cdot R \cdot T_{fin}; \quad p \cdot Vol_{in} = n \cdot R \cdot T_{in} \to \frac{V_{fin}}{V_{in}} = \frac{T_{fin}}{T_{in}}$$

$$\frac{V_{fin}}{V_{in}} = \frac{T_{fi} + \Delta TSH}{T_{in}}$$

$$\Delta T_{SH} = \frac{V_{0}^{2}}{R_{h}\delta} = T_{in} \left(\frac{V_{fin}}{V_{in}} - 1\right)$$

$$V_{0} = \sqrt{R_{h}\delta T_{in} \left(\frac{V_{fin}}{V_{in}} - 1\right)} = \sqrt{50 \cdot 0.01 \cdot 293 (1.1 - 1)} = 3.827 V$$